

# GRUPOS CRISTALOGRAFICOS Y TOPOLOGÍA EN ESCHER

JOSÉ MARÍA MONTESINOS AMILIBIA \*

\* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Facultad de Matemáticas. Universidad Complutense. Plaza de las Ciencias, 3. 28040 Madrid. montesin@mat.ucm.es

## ABSTRACT

Se ilustra con grabados de Escher un método topológico de obtención de los grupos cristalográficos. Se señalan generalizaciones.

## INTRODUCCIÓN<sup>1</sup>

Dejando aparte ahora la acuciante cuestión de los cuasicristales, sabemos que, al menos en teoría, la característica fundamental del estado cristalino es un alto grado de orden interno. En general, los objetos (moléculas, átomos o iones) de los que está compuesto el cristal están situados de una manera regular, que se repite una y otra vez en todas direcciones. En otras palabras, el diseño tridimensional (desde ahora, el diseño), formado por moléculas, átomos o iones, se superpone a sí mismo por la acción de traslaciones en al menos tres direcciones independientes del espacio. Esta es la característica fundamental del estado cristalino “clásico”. Y el empleo de los rayos X confirmó brillantemente esa hipótesis de Fedorov.

Además de poseer traslaciones, el diseño puede superponerse bajo la acción de otros movimientos, tanto directos (giros, helicoidales) como inversos (reflexiones, reflexiones sesgadas, inversiones y roto-inversiones), de manera que todos los movimientos

que superponen el diseño forman un grupo: el **grupo cristalográfico** que gobierna la formación del diseño.

Habida cuenta de que la colección de todos los movimientos (rígidos) del espacio euclidiano es infinita, se podría suponer a primera vista que el número de posibles grupos cristalográficos (salvo isomorfismo) es infinito.

Mucho antes de que los rayos X confirmaran la estructura ordenada de la materia cristalina Fedorov había encontrado que hay exactamente 17 grupos cristalográficos en el plano euclidiano y más tarde Fedorov, Schönflies y Barlow, trabajando más o menos en contacto (y corrigiéndose los dos primeros entre sí), describieron los 219 grupos cristalográficos (no isomorfos) espaciales. (Salvo afinidad<sup>2</sup> directa hay 230 grupos no conjugados.) Y más sorprendente, Bieberbach (respondiendo enseguida a una pregunta de Hilbert) demostró que el número de esos grupos es finito en cualquier dimensión. Hoy conocemos la lista de los 4.783 grupos en dimensión cuatro y sabemos que hay 222.018 en dimensión cinco y 28.927.922 en dimensión seis.

Si, como muchos de los lectores de este artículo (geólogos o ingenieros) habrán hecho, hojeamos las tablas internacionales de cristalografía veremos una enorme cantidad de información sobre esos 230 gru-

<sup>1</sup> Palabras clave: Cristalografía, Topología, Espacio Euclidiano, Isometría, Orbificie, Característica de Euler, Grupo cristalográfico, Afinidad.

<sup>2</sup> Una *afinidad* del espacio euclidiano n-dimensional es una biyección que envía rectas a rectas. Las propiedades llamadas “afines” son las que resisten la acción de las afinidades. Las isometrías, homotecias (y semejanzas en general), así como las “cizallas” son afinidades.

pos espaciales (y los 17 planos) que es necesaria para su aplicación en las diversas ramas de la Ciencia en donde la cristalografía geométrica es absolutamente indispensable.

Pero ¿cómo obtener las listas de grupos?

Leyendo los excelentes libros de Buerger se puede aprender el método empleado por Fedorov, Schönflies y Barlow. Se trata de combinar los posibles movimientos y estudiar caso por caso las posibilidades. El estudio es pues de carácter geométrico. El concepto de grupo no juega, en mi opinión, un papel central.

Zassenhaus ideó un método puramente algebraico para listar grupos en todas dimensiones. De hecho se llevó a cabo en dimensión 4. El método precisa de antemano una caracterización puramente algebraica de un grupo cristalográfico que obtuvo Bieberbach. Este método es algorítmico y apropiado para el empleo de un ordenador pero tiene la desventaja de no ser geométrico.

Modernamente Bonahon y Siebenmann (matemáticos franceses) introdujeron un método topológico para listar los grupos tridimensionales. Su idea desarrolla conceptos introducidos por Thurston en la década de los 70 del siglo anterior.

Mi intención en este artículo es ofrecer al lector una panorámica de este método. Ni que decir tiene que, siendo yo mismo un topólogo y un amante de la cristalografía y de los cristales, este método me entusiasma por su sencillez y por su profundidad matemática. Tiene además la ventaja de generalizarse a la cristalografía esférica y a la hiperbólica y por eso interesa tanto a los matemáticos.

Como no se debe echar vino nuevo en odres viejos, los nuevos métodos parecerán difíciles si no incomprensibles a algunos lectores. Esto es natural, pero a ellos ruego paciencia y amplitud de miras. Quién sabe si dentro de unos años estos métodos no habrán llegado a las aulas de nuestras Facultades y Escuelas y convertirán en obvio lo que ahora nos parece abstruso.

Mis miras pues en este artículo serán muy modestas pero espero que iluminadoras. Quiero obtener

topológicamente los cinco grupos cristalográficos directos planos e indicar cómo sacar los otros 12 inversos. Ilustraré los grupos mediante diseños del artista Escher (del que hay abundante bibliografía en la red).

Necesitamos dos secciones de preliminares. Si el lector tiene la paciencia de leerlas habrá pasado la parte más difícil de mi exposición.

## TOPOLOGÍA

Esta ciencia (una parte de la Geometría) detecta propiedades geométricas que no dependen de distancias ni ángulos sino sólo de la idea, un poco ambigua, de la posición relativa de las partes. A la Topología se la conoció inicialmente como Analysis Situs. Este nombre convivió con el de Topología al menos 50 años. El nombre de Analysis Situs proviene de una confusión originada en unas crípticas palabras de Leibnitz que probablemente se referían a algo muy diverso. Euler es casi con toda seguridad el primero que descubrió algo de tipo topológico aunque no creo que tuviera una clara percepción de la Topología. El primero, claramente consciente de la existencia de unas propiedades geométricas de una naturaleza nueva (topológicas), es Gauss a mediados del siglo XIX. Tanto es así que a su alumno Listing le animó al estudio de esta nueva rama de la ciencia. Listing escribió un libro sobre el tema en el que aparece por primera vez la palabra Topología.

El desarrollo de estas ideas continuó con Poincaré (que todavía la llamaba Analysis Situs en 1904),

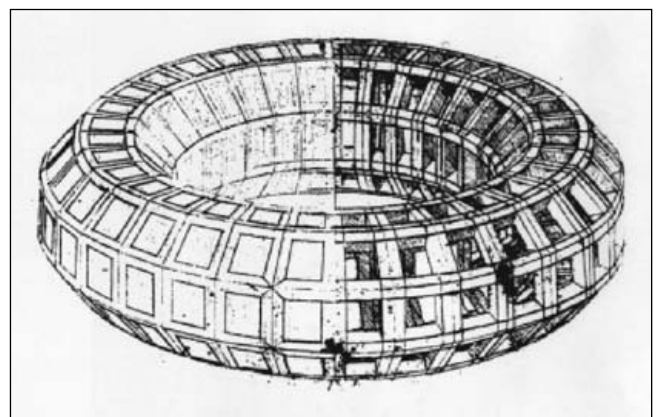
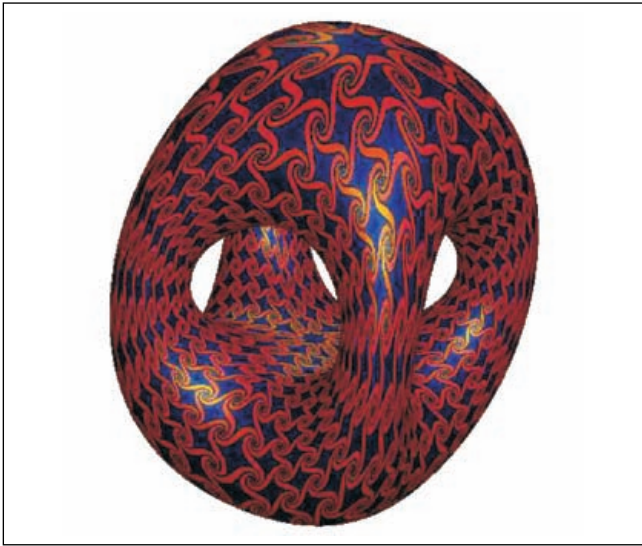
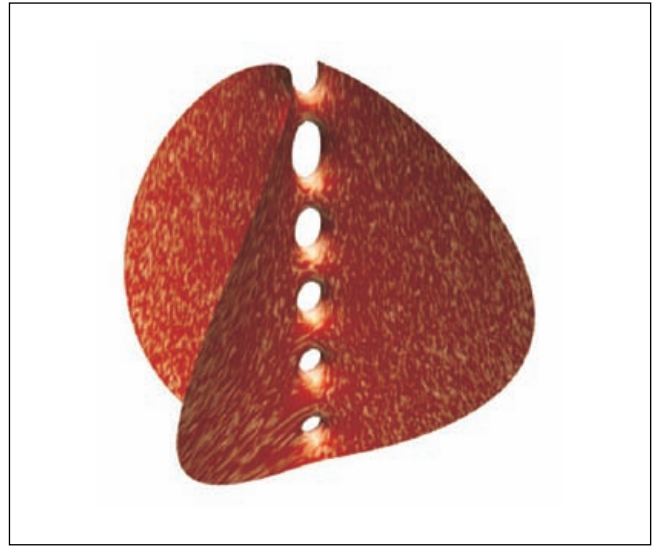


Figura 1. Toro  $F_{1,0}=T$  (Leonardo da Vinci).



**Figura 2.** Superficie  $F_3$  de género  $g=3$ .



**Figura 4.** Superficie  $F_{5,1}$  de género cinco con borde.

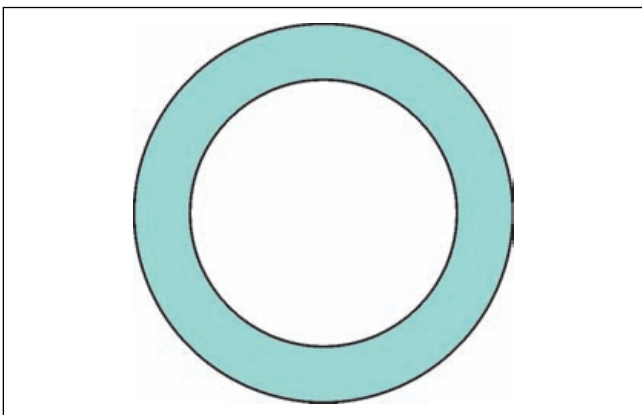
Heegaard y muchos otros después hasta que resultó evidente a lo largo del siglo XX que la Topología era una de las más importantes partes de las matemáticas.

La acción de una afinidad sobre una circunferencia es una elipse, por eso un geómetra con gafas afines no distingue entre una circunferencia y una elipse. También por eso decimos que la circunferencia y la elipse poseen las mismas propiedades afines. Estas son las propiedades de la circunferencia que no se pierden cuando la circunferencia se proyecta desde el infinito sobre un plano (proyección paralela).

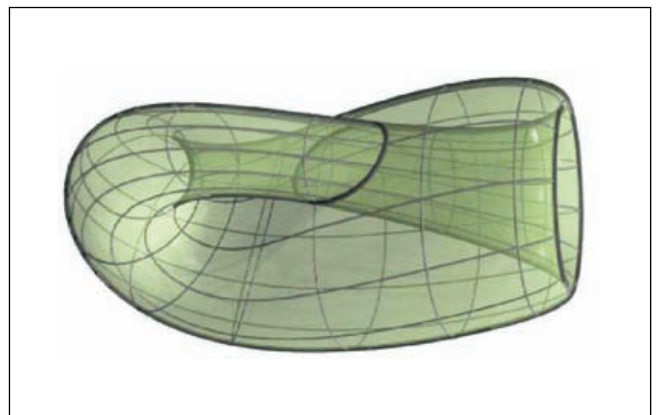
Si pensamos en los haces de rectas del plano veremos que los hay de dos tipos: haces convergentes (todas las rectas que pasan por un punto) y haces para-

lelos. Comprendemos enseguida que hay más haces que puntos. Podemos trabajar con haces en lugar de puntos. Los haces del plano forman los puntos (proyectivos) del plano proyectivo. Una recta proyectiva es, por definición, una colección de haces que comparten una recta euclidiana  $r$  fijada. Observamos que esta recta proyectiva  $pr$  posee un punto proyectivo por cada punto euclidiano de  $r$ . Pero  $pr$  tiene un punto más que  $r$ : a saber, el haz de rectas paralelas a  $r$ . A este punto nuevo se le suele llamar “punto del infinito” de  $r$ . Simplemente es un punto ideal donde convergen todas las rectas paralelas a  $r$ .

A las biyecciones del plano proyectivo (pueden pasar haces convergentes a haces paralelos!) que pasan rectas proyectivas a rectas proyectivas se las llama



**Figura 3.** Anillo  $F_{0,1}=A$ .



**Figura 5.** Botella de Klein  $N_2=K$ .



Figura 6. Banda de Möbius  $N_{1,1}=M$ .

homografías. Las afinidades son las homografías que mandan haces paralelos a haces paralelos.

La acción de una homografía sobre una circunferencia es una cónica (elipse, parábola o hipérbola). En el caso de la hipérbola cada una de sus dos asíntotas pertenece a un haz paralelo: estos son los puntos del infinito de la hipérbola.

Un geómetra con gafas proyectivas no puede pues distinguir entre una elipse y una hipérbola (las nuevas gafas aumentan su campo de visión al distinguir unos nuevos puntos del infinito, pero son tan versátiles que una parábola le parece igual a una elipse). Y por eso, parábolas, elipses e hipérbolas poseen las mismas propiedades proyectivas (la relación polo-polar, por ejemplo).

Este proceso de abstracción puede proseguir más llegándose a un extremo de abstracción extraordinario.



Figura 7.  $2M=K$ .

Así, un geómetra con gafas topológicas no distingue entre dos curvas cualesquiera cerradas (borde de un triángulo, circunferencia o cualquier dibujo de una curva cerrada por complicado que parezca), o entre la superficies de una esfera, tetraedro, cubo u otro poliedro que bordee algo similar. El topólogo todavía verá que hay propiedades comunes. Una de ellas es que todas las curvas cerradas poseen la misma característica de Euler.

Veamos la definición de la característica de Euler en el caso de una figura bidimensional; una superficie, por ejemplo.

Antes debemos comprender intuitivamente lo que es una superficie.

La superficie de una bola es una esfera  $S$ ; la de una rosquilla es un toro  $T$ . Puede imaginarse una rosquilla con  $g$  agujeros. Su superficie  $F_g$  es la superficie orientable de género  $g$ . El toro  $T$  es pues  $F_1$  y la esfera es  $F_0$ . Estas son las superficies orientables sin borde. Si quitamos a  $F_g$  un número  $m > 1$  de discos disjuntos (sus puntos interiores, sólomente) obtenemos la superficie orientable de género  $g$  con  $m$  componentes en su borde, denotada  $F_{g,m}$ . La superficie  $F_{0,1}$  es un disco (denotado más brevemente por  $D$ ). La superficie  $F_{0,2}$  es un anillo (denotado más brevemente por  $A$ ).

Hay también superficies no-orientables. Una de ellas, con borde, es la conocida banda de Möbius (denotada  $M$ ). Su borde tiene una sólo componente. Si a una esfera le quitamos  $k$  discos y en su lugar pegamos por su borde  $k$  bandas de Möbius  $M$  obtenemos la superficie no-orientable de género  $k$ , denotada  $N_k$ . Así  $M$ , pegado con un disco  $D$  por su borde, es  $N_1$ , una superficie no orientable sin borde topológicamente equivalente al plano proyectivo (denotado  $P$ ) que definimos más arriba. Y si pegamos por su borde dos bandas de Möbius obtenemos  $N_2$ , una superficie no orientable sin borde que llamamos botella de Klein (denotada  $K$ ). Si quitamos a  $N_k$  un número  $m > 1$  de discos disjuntos (sus puntos interiores, sólomente) obtenemos la superficie no-orientable de género  $k$  con  $m$  componentes en su borde, denotada  $N_{k,m}$ .

En este artículo no necesitaremos sino  $S$  (esfera),  $T$  (toro),  $D$  (disco),  $A$  (anillo),  $P$  (plano proyectivo),  $K$  (botella de Klein) y  $M$  (banda de Möbius).

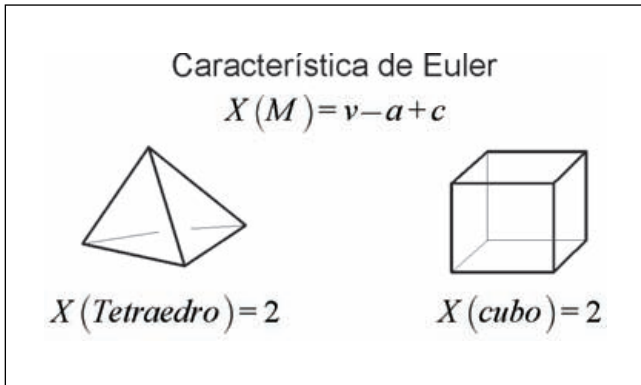


Figura 8. Característica de Euler.

Si descomponemos la superficie  $Q$  en polígonos (que entre sí comparten aristas o vértices) la característica de Euler de  $Q$  (denotada por  $X(Q)$ ) es el número de vértices ( $v$ ) menos el número de aristas ( $a$ ) más el número de caras ( $c$ ):  $X(Q) = v - a + c$  (Figura 8).

Como un tetraedro (su borde) no se distingue de un cubo (con gafas topológicas) ni de una esfera, por eso decimos que la  $X$  de la esfera es 2. Invitamos al lector a poligonizar la esfera de varias maneras y comprobar (¿tal vez demostrar?) el aserto.

La fórmula  $X(F_{g,m}) = 2 - 2g - m$  puede comprobarla ahora el lector con mucha facilidad. Así la característica de las superficies orientables sin borde baja de dos en dos al aumentar  $g$ . Para  $g=0$  ella es 2 (esfera).

La fórmula  $X(N_{k,m}) = 1 - k - m$  dice que la característica de las superficies no-orientables sin borde baja de uno en uno al aumentar  $k$ . Para  $k=1$  ella es 1 (plano proyectivo).

Entonces

$$X(A) = X(M) = X(K) = X(T) = 0.$$

### LAS ORBIFICIES

Generalizamos la característica de Euler al caso de una orbificie.

Definiré primero qué es una orbificie.

Una orbificie es una superficie  $Q$  (que puede tener borde o ser no-orientable) junto con una colección

finita  $F$  de puntos (llamados singulares) dotados cada uno de un número entero  $n > 1$ .

Un punto  $x$  de  $F$  con número asociado  $n(x) > 1$  que esté sobre el borde de  $Q$  será denotado por  $\bar{n}(x)$  y diremos que es una  $\bar{n}(x)$ -esquina. Un punto  $x$  de  $F$  con número asociado  $n(x) > 1$  que no esté sobre el borde de  $Q$  será denotado por  $n(x)$  y diremos que es un  $n(x)$ -pico.

Así por ejemplo, la orbificie  $S2222$  es una esfera  $S$  cuyos puntos singulares son cuatro 2-picos. Y  $D222$  es un disco cuyos puntos singulares son un 2-pico en su interior y dos  $\bar{2}$ -esquinas en su borde.

Una orbificie es por definición orientable si es una superficie orientable sin borde (sólo tiene picos). En caso contrario se dice no-orientable.

Ahora definimos la característica de Euler  $X^o(Q)$  de una orbificie  $Q$  exactamente igual que para una superficie sólo que asignando a un vértice que sea un  $n$ -pico ( $\bar{n}$ -esquina) el peso  $1/n$  ( $1/2n$ ) y a una arista que esté en el borde de  $Q$  el peso  $-1/2$ . (Se supone que en la poligonación de la superficie todos los puntos singulares son vértices).

Así, por ejemplo, para calcular  $X^o(Smnp)$  podemos proceder así. La característica de Euler  $X(S)$  de la esfera es, como sabemos, 2. Quitamos a la esfera tres puntos y los volvemos a añadir con pesos  $1/m$ ,  $1/n$  y  $1/p$ . Obtenemos

$$X^o(Smnp) = 2 - 3 + 1/m + 1/n + 1/p = -1 + 1/m + 1/n + 1/p$$

### LA ORBIFICIE DE UN GRUPO CRISTALOGRÁFICO

Vamos a ver ahora cómo todo grupo cristalográfico plano  $G$  tiene asociada una específica orbificie (que denotaré  $\widehat{G}$ ).

Veamos esto con algunos ejemplos sencillos.

Consideremos el grupo cristalográfico  $G$  de superposiciones del dibujo de Escher (Figura 9).

El grupo  $G$  posee sólo traslaciones.





Figura 9. Toro  $T$ .

Al aplicar al ojo  $x$  del pez blanco todas las traslaciones obtenemos la órbita  $Gx$  del ojo  $x$ .

Todo punto del plano pertenece a una sola órbita.

En el rectángulo  $R$  determinado por cuatro ojos (del pez blanco) más cercanos están representadas todas las órbitas porque al aplicar a  $R$  todas las traslaciones obtenemos la órbita  $GR$  de  $R$  y es claro que  $GR$  cubre todo el plano por un embaldosado de rectángulos iguales a  $R$ .

Pero una misma órbita puede estar representada en el rectángulo  $R$  más de una vez. Por ejemplo la órbita del ojo está representada cuatro veces (las cuatro esquinas de  $R$ ). Las demás órbitas están representadas sólo una vez (puntos interiores de  $R$ ) o dos veces (puntos de las aristas de  $R$ ).

Supongamos que hacemos la ficción mental de imaginar un nuevo espacio  $\widehat{G}$  como sigue. Los puntos



Figura 10.  $S_{2222}$ .

del nuevo espacio son las órbitas de la acción de  $G$  en el plano euclidiano.

Los puntos del espacio  $\widehat{G}$  están en correspondencia biunívoca con las partes de las órbitas que están en  $R$ , porque toda órbita posee en  $R$  al menos un representante. El espacio  $\widehat{G}$  se obtiene identificando entre si los puntos de  $R$  que pertenecen a la misma órbita. Es decir, debemos pegar a pares los lados opuestos de  $R$  mediante las dos traslaciones que envían una arista a su opuesta. El resultado es un toro  $T$ . Así que en este caso la orbificie  $\widehat{G}$  asociada a  $G$  no posee puntos singulares: es una superficie

$$\widehat{G} = T$$

que es una orbificie orientable (por ser  $G$  un grupo directo: sus elementos preservan orientación).

Nótese que

$$X^\circ(\widehat{G}) = X(T) = 0.$$

Tomemos un ejemplo más complicado (de Escher también, como todos los demás). El diseño de la Figura 10 posee un grupo de superposiciones  $G$  que además de las preceptivas traslaciones posee giros de  $180^\circ$ .

En la Figura 11 he dibujado un dominio fundamental  $R$ . Aquí  $R$  es un rectángulo cuya órbita  $GR$  cubre todo el plano sin solapamientos. Es decir, cada

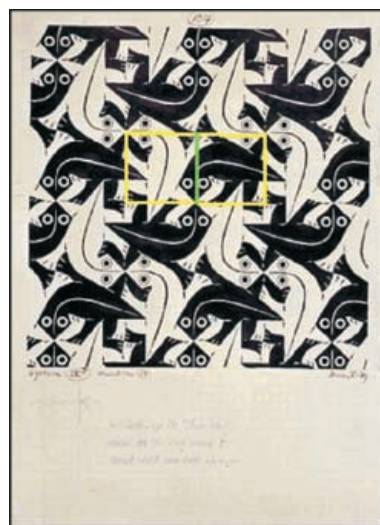


Figura 11. Un dominio fundamental.

órbita está representada por algún punto de  $R$ , y si está representada más de una vez, lo es por puntos del borde de  $R$ . Estos últimos puntos se han de identificar para obtener la orbificie  $\widehat{G}$ . Vemos que los puntos medios de las aristas largas de  $R$  son centros de rotaciones de orden 2 del grupo  $G$ . Por eso la mitad de una arista larga de  $R$  se ha de identificar con su otra mitad por rotación en el centro de la arista. Mientras que las aristas cortas se identifican por translación. Esto puede físicamente hacerse, plegando el rectángulo por la línea verde y el resultado final es una almohada de cuatro picos. El ángulo total en cada uno de los cuatro picos es de  $2\pi/2$  y por eso señalamos los cuatro vértices como puntos singulares de la orbificie  $\widehat{G}$  asignándoles el número 2, correspondiente al orden del subgrupo cíclico de  $G$  que estabiliza cada punto de la órbita que ese pico representa. Como una almohada es una esfera  $S$ , vemos que esta vez

$$\widehat{G} = S2222$$

que es una orbificie orientable (por ser  $G$  un grupo directo). Notamos que también ahora

$$X^o(\widehat{G}) = X^o(S2222) = 0.$$

Un tercer ejemplo será necesario. En el diseño de la figura siguiente un dominio fundamental es el triángulo equilátero señalado. Sus tres vértices corresponden a centros de rotación de orden 3 por los que pasan líneas de reflexión. La orbificie  $\widehat{G}$  asociada al grupo  $G$  de simetría del diseño es  $\overline{D333}$ . Pues, en efecto, en este caso toda órbita está representada exactamente una vez en el triángulo y por eso no es necesaria ninguna identificación. El triángulo es topológi-



Figura 12.  $\overline{D333}$ .



Figura 13.  $T$ .

camente un disco  $D$  y hay tres  $\overline{3}$ -esquinas. La orbificie  $\overline{D333}$  es no-orientable: el borde procede de las reflexiones del grupo  $G$  que es un grupo inverso (hay elementos que invierten orientación).

También en este caso  $X(\overline{D333}) = 0$ . En efecto, hay 3 vértices de peso  $1/6$ ; 3 aristas de peso  $1/2$  y un triángulo (de peso 1). Por eso  $X(\overline{D333}) = 3/6 - 3/2 + 1 = 0$ .

En general, el grupo cristalográfico  $G$  define un nuevo espacio topológico, a saber, el espacio de órbitas. Este espacio es una orbificie  $\widehat{G}$  cuyos puntos singulares son  $n$ -picos (resp.  $\overline{n}$ -esquinas) procedentes de orbitas cuyos puntos están estabilizados por grupos cíclicos de orden  $n$  (resp. por los que pasan líneas de reflexión) donde  $n > 1$ . Las órbitas de puntos situados sobre los ejes de reflexión del grupo  $G$  forman el borde de la orbificie  $\widehat{G}$ . Además, la orbificie  $\widehat{G}$  es orientable si y sólo si  $G$  es directo.



Figura 14.  $S2222$ .





Figura 15. S333.

El siguiente Teorema es la base topológica de la cristalografía bidimensional.

**Teorema fundamental.** *La característica de Euler de la orbificie  $\widehat{G}$  asociada al grupo cristalográfico bidimensional  $G$  es cero.*

**Demostración:** El grupo  $G$  posee un subgrupo  $H$  de traslaciones que es cristalográfico obviamente. La orbificie  $\widehat{H}$  asociada a  $H$  es, como hemos visto en nuestro primer ejemplo, un toro  $T$  y ya sabemos que  $X^\circ(\widehat{H}) = X(T) = 0$ . Vamos a demostrar que siempre hay un número entero  $N > 0$  tal que  $NX^\circ(\widehat{G}) = X^\circ(\widehat{H})$ . Como ya sabemos que  $X^\circ(\widehat{H}) = X(T) = 0$ , deducimos que también  $X^\circ(\widehat{G})$  es cero.

El grupo cociente  $G/H$  actúa en el toro  $\widehat{H}$  y su espacio de órbitas es  $\widehat{G}$ . Hay una aplicación natural

$p: \widehat{H} \rightarrow \widehat{G}$  que es genéricamente  $N$  a 1 donde  $N$  es el número de elementos del grupo  $G/H$ . La definición de peso de un pico o de una esquina de una orbificie ha sido confeccionada precisamente para que una aplicación como la  $p$  no sólo sea  $N$  a 1 para casi todos los puntos de  $\widehat{G}$  sino que también sea multiplicativa para las esquinas y picos. Pues si un pico tiene peso  $1/n$  es que todas sus preimágenes en el toro son centros de orden  $n$  y por tanto hay exactamente  $N/n$  preimágenes. Y lo mismo pasa con una  $\bar{n}$ -esquina. Ella posee  $N/2n$  preimágenes. Entonces es cierto que  $X^\circ(H) = NX^\circ(G)$ . Y esto demuestra el teorema.

### LAS 17 ORBIFICIES DE CARACTERÍSTICA DE EULER CERO

Como por el anterior Teorema una orbificie procedente de un grupo cristalográfico posee característica de Euler cero, vamos a enumerar primero todas las orbificies con característica de Euler cero. Veremos que hay exactamente 17 y que cada una procede efectivamente de un grupo cristalográfico. Esto demostrará finalmente que hay (a menos de isomorfismo) 17 grupos cristalográficos planos.

Primero consideraremos las orbificies que son orientables. (Ellas carecen de borde y sólo poseen picos.) Sea  $F_g; n_1; \dots; n_p$  una tal orbificie. Ella es una superficie orientable  $F_g$  de género  $g$  con una colección de picos de órdenes  $n_1; \dots; n_p$ . Como  $X(F_g) = 2 - 2g$  podemos calcular  $X^\circ(F_g; n_1; \dots; n_p)$  mediante la fórmula (que se demuestra como hicimos para  $S_{mnp}$ ):

$$X^\circ(F_g; n_1, \dots, n_p) =$$



Figura 16. S244.



Figura 17. S236 (ignorando colores).



$$2 - 2g + (-1 + 1/n_1) + \dots + (-1 + 1/n_p) = 2 - 2g - p + 1/n_1 + \dots + 1/n_p$$

Es un ejercicio absolutamente elemental demostrar que las únicas soluciones son las cinco siguientes:

$$F_1 = T$$

$$F_0; 2222 = S2222$$

$$F_0; 333 = S333$$

$$F_0; 442 = S442$$

$$F_0; 632 = S632$$

Los ejemplos de las Figuras 13 a 17 son teselaciones cuyos grupos de simetría son grupos cristalográficos euclidianos que definen las orbificies  $T$  y  $S2222$ ,  $S333$ ,  $S442$  y  $S632$ , respectivamente. Pero en el último ejemplo hay que ignorar los colores. Nosotros denotaremos, en todo lo que queda del artículo, a un grupo cristalográfico euclidiano que define la orbificie  $Q$  mediante la misma notación  $Q$ .

En el ejemplo de la Figura 16 los centros de las vieiras son de orden dos, mientras que los centros donde se encuentran cuatro caracolas son de orden cuatro; y de éstos los hay de dos tipos distintos.

Ahora listaremos las orbificies no orientables. Ellas se pueden obtener fácilmente teniendo en cuenta la siguiente observación. Si  $G$  es un grupo cristalográfico, él posee un subgrupo de índice dos  $G_0$  formado de todos los elementos directos de  $G$ . Esto define una función entre orbificies  $\widehat{G}_0 \rightarrow \widehat{G}$  que es dos a uno. Es decir, la orbificie orientable  $\widehat{G}_0$  posee una involución (inversa) cuyo espacio de órbitas es  $\widehat{G}$ .

Este principio puede aplicarse para obtener 12 orbificies no-orientables a partir de las cinco  $T$ ,  $S2222$ ,  $S333$ ,  $S442$ ,  $S632$  orientables. Basta para ello conocer de antemano qué involuciones inversas posee un toro  $T$  y una esfera  $S$ .

Las involuciones inversas  $U$  en el toro definen espacios de órbitas  $\widehat{U}$  que son orbificies no orientables de característica de Euler cero. Como el grupo  $U$  tiene orden dos  $\widehat{U}$  no puede poseer ni picos (sólo podrían ser de orden 2, y entonces puede demostrarse que  $\widehat{U}$  sería orientable) ni esquinas (que siempre poseen orden

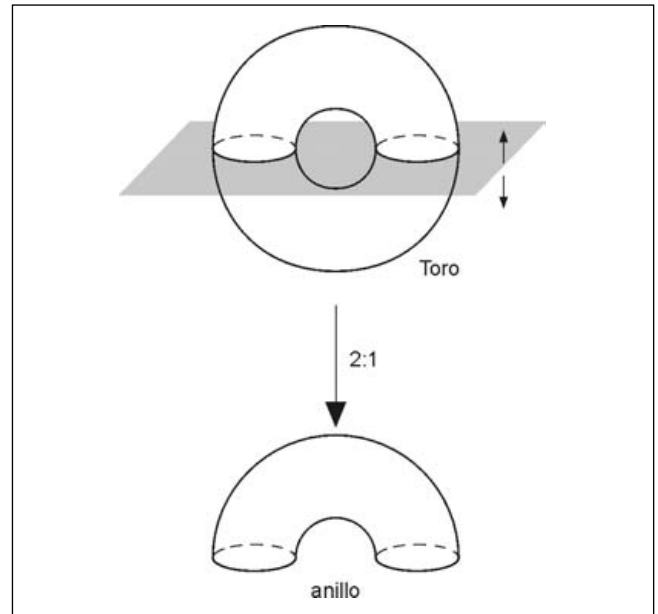


Figura 18. Reflexión en un plano.

superior a cuatro). Sólo podría haber borde (proveniente de una reflexión). Así caben sólo tres casos:

Si  $\widehat{U}$  es orientable con borde, necesariamente es una esfera perforada de dos discos (así su característica de Euler es  $X(S) - 2 = 0$ ). Esto es un anillo  $A$ . Y en efecto, un toro posee una involución que produce el espacio de órbitas  $A$  (Figura 18).

Si  $\widehat{U}$  es no orientable con borde, necesariamente es un plano proyectivo  $P$  perforado de un disco (así su

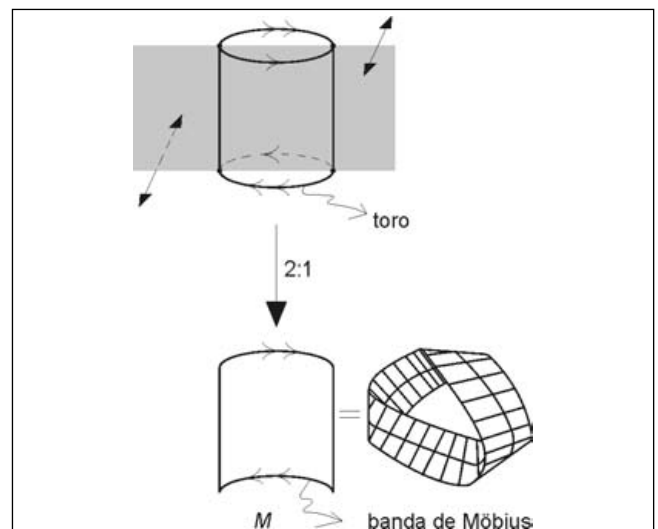


Figura 19. Toro torcido y reflexión.

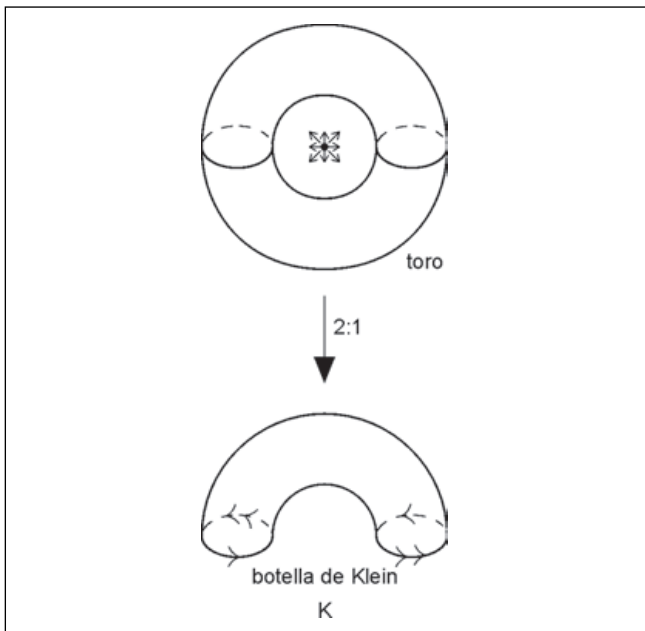


Figura 20. Reflexión en un punto.

característica de Euler es  $X(P)-1=0$ ). Esto es una banda de Möbius  $M$ . Y en efecto, ciertamente un toro posee una involución que produce el espacio de órbitas  $M$  (Figura 19).

Finalmente si  $\hat{U}$  es no orientable sin borde, necesariamente es una botella de Klein  $K$  (así su característica de Euler es  $X(K)=0$ ). Y en efecto, ciertamente un toro posee una involución que produce el espacio de órbitas  $K$  (Figura 20).

Luego hay tres involuciones inversas en  $T$  (que producen orbificies  $A, M, K$ ).



Figura 21.  $A$ .



Figura 22.  $M$  (ignorando colores).



Figura 23.  $K$ .

Los ejemplos de las Figuras 21 a 23 definen las orbificies  $A, M, K$ , respectivamente. Pero en el segundo ejemplo hay que ignorar los colores (si no, es un  $A$ ).

Las involuciones inversas  $U$  en la esfera definen espacios de órbitas  $\hat{U}$  que son orbificies no orientables de característica de Euler  $X(S)/2=1$ . Como antes:

Si  $\hat{U}$  es orientable con borde necesariamente es una esfera perforada de un disco (así su característica de Euler es  $X(S)-1=1$ ). Esto es un disco  $D$ . Y en efecto, la reflexión en el ecuador de una esfera produce el espacio de órbitas  $D$ .

Si  $\hat{U}$  es no orientable (con o sin borde) necesariamente es un plano proyectivo  $P$  (así su característica de Euler es  $X(P)=1$ ). Y en efecto, la reflexión en el centro de una esfera produce el espacio de órbitas  $P$ .

Luego hay dos involuciones inversas en  $S$  (que producen orbificies  $D, P$  de característica de Euler 1: ellas no son euclidianas).



Figura 24.  $\overline{D2222}$ .



Figura 26.  $D22$ .

Ahora podemos hallar las involuciones inversas de la orbificie  $S2222$ . Ellas deben respetar las esquinas. Si consideramos los cuatro picos situados a distancias de  $\pi/2$  sobre el ecuador la reflexión en el ecuador da como espacio de órbitas  $D2222$  porque los picos se convierten en esquinas sobre el borde de  $D$ . Si la reflexión es en un meridiano que pasa por dos picos, el espacio de órbitas es  $D222$ . Si la reflexión es en un meridiano que separa dos picos de dos picos, el espacio de órbitas es  $D22$ . Finalmente la reflexión en el centro de la esfera produce la orbificie  $P22$ . Y no hay más posibilidades.

Ejemplos de estos grupos son los que aparecen en las Figuras 24 a 27.

Análogas consideraciones valen para  $S333$  (como el número de picos es impar, esta vez no actúa la reflexión en el centro de la esfera). Hay dos casos que respectivamente producen:  $D333$ ,  $D33$ .

El caso  $S442$  produce  $\overline{D442}$  y  $D42$ .



Figura 27.  $P22$  (ignorando colores).



Figura 25.  $\overline{D222}$ .



Figura 28.  $\overline{D333}$ .





Figura 29.  $D_{33}$ .

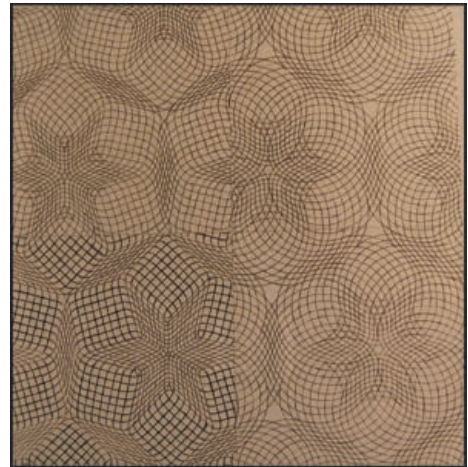


Figura 32.  $D_{632}$ .

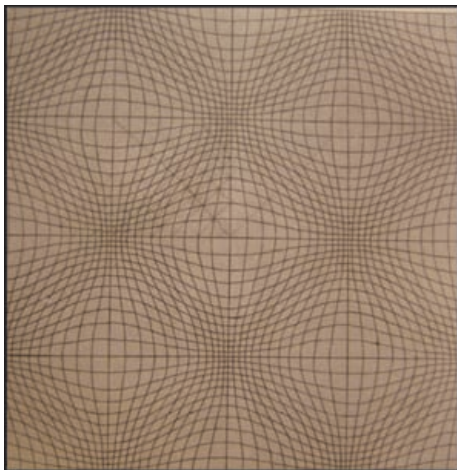


Figura 30.  $D_{244}$ .



Figura 31.  $D_{42}$ .

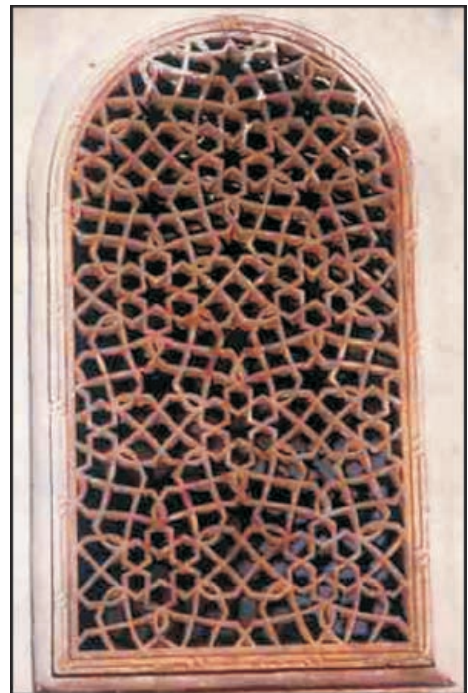


Figura 33.  $D_{632}$  en Patio de Arrayanes (Alhambra).

Finalmente  $S_{632}$  da  $D_{632}$ .

Y resumiendo, obtenemos que  $T$  da tres “hijos”, a saber  $A$ ,  $M$ ,  $K$ ,  $S_{2222}$  da cuatro hijos:  $D_{2222}$ ,  $D_{222}$ ,  $D_{22}$ ,  $P_{22}$ ;  $S_{333}$  da dos hijos  $D_{333}$ ,  $D_{33}$ ;  $S_{442}$  da dos hijos  $D_{442}$  y  $D_{42}$ ; y finalmente  $S_{632}$  da un hijo  $D_{632}$ . En total 17 grupos.

Ejemplos de los restantes grupos aparecen en las Figuras 28 a 33 (la última fotografía procede de la Alhambra: obsérvese lo parecida que es al dibujo 32).



## LA NOTACIÓN TOPOLÓGICA

Hemos denotado un grupo cristalográfico  $G$  por su orbificie asociada  $\hat{G}$ .

La notación indica de un vistazo qué elementos de simetría caracterizan al grupo  $G$ .

Por ejemplo  $S2222$  indica que el grupo es directo y posee cuatro centros de orden dos distintos (no conju-gados). En la figura 34 que (ignorando colores) representa  $S2222$  están señalados los cuatro centros en el borde del caballito central.

Otro ejemplo es  $P22$ . Como el plano proyectivo  $P$  es no-orientable el grupo es inverso y debe contener reflexiones o reflexiones sesgadas. Si tuviera reflexio-nes, ellas inducirían un borde en la orbificie. Como  $P$  no tiene borde, deducimos que hay reflexiones ses-gadas unicamente y dos centros distintos de rotación de orden dos. En la Figura 35 los centros de orden dos están entre los peces blanco y negro: aleta con aleta y cola con cola. Las reflexiones sesgadas se ven en el diseño alternante vertical.

Asímismo  $A$  (anillo) indica grupo inverso con dos reflexiones distintas porque  $A$  tiene dos componentes en su borde. Y no hay rotaciones.

$M$  (banda de Möbius) indica grupo inverso con una sólo reflexion porque  $M$  tiene una sólo componente en



Figura 34.  $S2222$  (ignorando colores).



Figura 35.  $P22$  (ignorando colores).

su borde. La línea central de la banda indica que hay una reflexión sesgada paralela a la reflexión.

$K$  (botella de Klein o banda de Möbius doblada) sugiere que la reflexión anterior no existe y sólo hay reflexiones sesgadas paralelas.

Pero para ayudar a los lectores acostumbrados a la notación clásica, he aquí una tabla:

$T = p1$	$P22 = pgg$	$S442 = p4$
$K = pg$	$D222 = cmm$	$D42 = p4g$
$A = pm$	$D2222 = pmm$	$D442 = p4$
$M = cm$	$S333 = p3$	$S632 = p6$
$S2222 = p2$	$D33 = p31m$	$D632 = p6m$
$D22 = pmg$	$D333 = p3m1$	

## LOS GRUPOS DE FRISO

La definición de grupo cristalográfico fue muy vaga. Sólo dije que el grupo ha de contener trasla-ciones en las dos direcciones del espacio. Pero ahora puedo ya dar una definición rigurosa (aunque topoló-gica).

**Definición.** Un grupo  $G$  de isometrías euclidianas planas es un grupo cristalográfico si su espacio de órbitas  $\hat{G}$  es una superficie compacta.

Si relajamos la condición “compacta” obtenemos un nuevo concepto:

**Definición.** Un grupo infinito  $G$  de isometrías euclidianas planas es un grupo de friso si su espacio de órbitas  $\hat{G}$  es una superficie no compacta.

La condición “infinito” se impone para descartar el caso de un grupo  $G$  que conste únicamente de rotaciones en torno a un punto. Para él, su espacio de órbitas  $\widehat{G}$  es un cono (no compacto).

El hecho de ser  $G$  un grupo de friso implica que ha de contener traslaciones. Y como no es cristalográfico, las traslaciones van en una sola dirección. El subgrupo  $H$  de todas sus traslaciones enrolla el plano y da como espacio de órbitas un cilindro infinito (una esfera menos dos puntos). Estos puntos se señalan con el símbolo  $\infty$  porque el ángulo en torno a ellos es  $2\pi/\infty = 0$  (también porque el subgrupo de  $G$  que fija ese punto ideal es  $H$ , infinito). Así que la notación para  $\widehat{H}$  es  $S_{\infty\infty}$ . Nótese que  $X^{\nu}(S_{\infty\infty}) = 2 - 2 + 2(1/\infty) = 0$ .

Se tiene una función  $p: S_{\infty\infty} \rightarrow \widehat{G}$ . Por tanto, al igual que antes:

**Teorema.** Si  $G$  es un grupo de friso entonces  $X^{\nu}(\widehat{G}) = 0$ .

Ahora listamos todos los grupos de friso.

El trabajo es mejor hacerlo junto con la obtención de la lista de los 17 cristalográficos. El esfuerzo es el mismo. Sólo hay que permitir en los cálculos anteriores la posibilidad de puntos marcados  $\infty$  (con peso  $1/\infty = 0$ ). Al realizar esto, observamos que la lista  $T, S_{2222}, S_{333}, S_{442}, S_{632}$  de orbificies orientables aumenta con dos más:  $S_{\infty\infty}, S_{\infty 22}$ , que son los grupos de friso directos.

Los hijos de estos los obtenemos como arriba.  $S_{\infty\infty}$  posee tres hijos:  $P_{\infty}, D_{\infty}, \overline{D_{\infty\infty}}$ . Y  $S_{\infty 22}$  posee dos hijos:  $\overline{D_{\infty 22}}, D_{2\infty}$  (ver Figura 36).

Hay pues siete grupos de friso:  $S_{\infty\infty}, P_{\infty}, D_{\infty}, \overline{D_{\infty\infty}}, S_{\infty 22}, \overline{D_{\infty 22}}, D_{2\infty}$ .

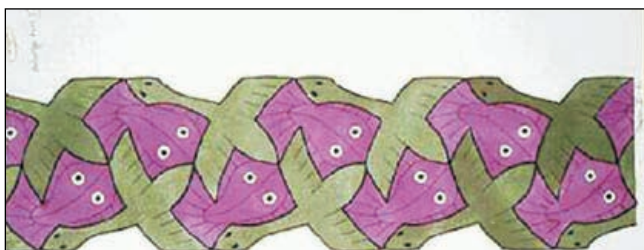


Figura 36.  $P_{\infty}$ .

Obviamente los tres primeros son traslación, reflexión sesgada y reflexión. El cuarto está generado por dos reflexiones en ejes paralelos. El quinto está generado por dos centros de orden dos. Combinándolo con reflexiones ortogonales a la línea de centros que pasen o no por los centros tenemos los dos últimos grupos.

## LOS GRUPOS CRISTALOGRAFICOS DE LA ESFERA BIDIMENSIONAL

Las ideas anteriores se generalizan a la esfera de dimensión dos  $S^2$ .

¿Cuáles son los grupos cristalográficos de  $S^2$ ?

He aquí (Figuras 37 a 39) teselaciones de Escher en la esfera, con orbificies asociada  $S_{233}, S_{234}$  y  $S_{235}$ .



Figura 37.  $S_{233}$ .



Figura 38.  $S_{234}$ .



Figura 39.  $S_{235}$ .

Si  $G$  es un grupo cristalográfico esférico, él es finito y automáticamente el espacio de órbitas es una orbificie  $\widehat{G}$ . Como existe la función  $p: S^2 \rightarrow \widehat{G}$  se tiene para algún entero positivo  $N$  que  $2 = X(S^2) = NX^\circ(\widehat{G})$ . Esto implica el Teorema:

**Teorema.** Si  $G$  es esférico cristalográfico entonces  $X^\circ(\widehat{G}) > 0$ :

Empezaremos hallando la lista de las orbificies  $Q$  con característica de Euler positiva.

Esto es facilísimo porque conocemos las que tienen característica de Euler cero. Ellas sirven de frontera entre las de característica de Euler positiva y negativa.

Si  $Q$  es orientable, sólo tiene picos. Es  $X^\circ(Spq) > 0$ , para todo  $p \geq 1, q \geq 1$ . Es  $X^\circ(Sp_{22}) > 0$ , para todo  $p \geq 2$ . Como  $X^\circ(S_{632}) = 0$ , es  $X^\circ(S_{332}) > 0, X^\circ(S_{432}) > 0, X^\circ(S_{532}) > 0$ .

No hay más casos.

Las orbificies de característica positiva  $Sp, p > 1$  y  $Spq, p > q > 1$  no provienen de ningún grupo cristalográfico esférico, porque las rotaciones (de orden  $p$ ) en la esfera poseen dos puntos fijos de igual orden (así  $Spp$  ciertamente viene de un grupo cíclico  $\mathcal{C}_p$  de orden  $p$  generado por una rotación de  $2\pi/p$  en torno a la línea de los polos).

La orbificie  $Sp_{22}$  es una hija de  $Spp$  al hacer actuar a  $Spp$  la involución directa (rotación de  $180^\circ$ ) que permuta los dos picos  $p$  de  $Spp$ . El grupo cristalográfico correspondiente extiende el  $Spp$  mediante

una rotación de  $180^\circ$  en torno a un eje perpendicular al eje de orden  $p$ : El grupo  $Sp_{22}$  es isomorfo al grupo diédrico  $\mathcal{D}_p$  de orden  $2p$ .

Los grupos de simetrías directas del tetraedro  $\mathcal{T}$ , octaedro  $\mathcal{O}$  e icosaedro  $\mathcal{I}$  dan las orbificies  $S_{332}, S_{432}$  y  $S_{532}$  respectivamente.

Los grupos no orientables se pueden obtener como hicimos más arriba.

Hijos de  $Spp$ :  $Pp, Dp, D\overline{pp}$ ;  $p \geq 1$ .

Y  $Sp_{22}$  posee dos hijos:  $D\overline{p22}, D2\overline{p}$ ;  $p > 1$ .

Hijos de  $S_{332}$ :  $D\overline{332}, D3\overline{2}$ .

Hijos de  $S_{432}$ :  $D\overline{432}$ .

Hijos de  $S_{532}$ :  $D\overline{532}$ .

En otras palabras hemos demostrado que la lista de grupos finitos del grupo de isometrías de la esfera  $S$  es:

$Spp, Pp, Dp, p \geq 1; D\overline{pp}, p \geq 2$ .

$Sp_{22}, D\overline{p22}, D2\overline{p}; p > 1$ .

$S_{332}, D\overline{332}, D3\overline{2}$ .

$S_{432}, D\overline{432}$ .

$S_{532}, D\overline{532}$ .

Vemos que hay infinitos grupos.

## LA CRISTALOGRAFÍA EUCLIDIANA TRIDIMENSIONAL

Hemos hallado los 17 grupos cristalográficos euclidianos bidimensionales y los (infinitos) grupos cristalográficos esféricos bidimensionales. Ellos sirven de puente para hallar los grupos cristalográficos euclidianos tridimensionales.

En efecto, un miembro  $g$  de un tal grupo cristalográfico  $G$  es una transformación del espacio euclidiano

$R^3$  que consiste en una traslación  $g_t$  seguida de una isometría  $g_\infty$  que mueve sobre ellas mismas a las esferas de centro el origen 0 de  $R^3$ . A  $g_t$  le llamamos la parte traslacional de  $g$  y a  $g_\infty$ , su parte rotacional. Si la parte rotacional  $g_\infty$  es la identidad (no mueve nada) decimos que el elemento  $g$  es una traslación (pura) de  $G$ . Interesa fijarse en la colección de todas las traslaciones puras de  $G$ , (conjunto que denotamos por  $G_t$ ) y la colección  $G_\infty$  de todas las partes rotacionales  $g_\infty$  de todos los miembros de  $G$ .

El conjunto  $G_\infty$  es un grupo *finito* de isometrías de la esfera bidimensional  $S^2$ . Es decir  $G_\infty$  es un grupo cristalográfico esférico bidimensional. Por tanto  $G_\infty$  es uno de los infinitos grupos estudiados en la sección anterior. Sin embargo  $G_\infty$  no puede ser arbitrario: sus elementos están sujetos a una poderosa restricción: la famosa *restricción cristalográfica*. En efecto, un miembro de  $G_\infty$  sólo puede tener los órdenes 1, 2, 3, 4, 6. A continuación vamos a ver porqué.

En efecto, el conjunto  $G_t$  de traslaciones puras es un subgrupo de  $G$  que puede pensarse como la colección de vectores del espacio tridimensional  $R^3$  que definen esas traslaciones. Si definimos *red* (*lattice* en inglés) como la colección de todos los vectores que dependen linealmente, con coeficientes enteros, de una base dada de  $R^3$ , puede verse que  $G_t$  es una red. Es decir, hay tres vectores  $e_1, e_2, e_3$  linealmente independientes tales que

$$G_t = \{ae_1 + be_2 + ce_3 : a, b, c \in Z\}$$

Entonces puede verse que el grupo  $G_\infty$  opera en  $R^3$  de tal modo que envía los vectores de la red  $G_t$  sobre ellos mismos. Es decir,  **$G_\infty$  es un subgrupo del grupo de simetría de la red  $G_t$** . La matriz de un elemento  $g_\infty$  de  $G_\infty$  respecto de la base  $e_1, e_2, e_3$  tiene entonces coeficientes enteros y por ello su traza (suma de elementos de la diagonal) es entera. Esta traza determina el orden del elemento  $g_\infty$  y el hecho de ser esta traza un número entero implica la restricción cristalográfica.

Hay una demostración geométrica de este mismo hecho que se basa en una clasificación de las redes de  $R^3$  por sus grupos de simetría. Uno puede llegar a demostrar que un grupo finito de isometrías de  $S^2$  que deje invariante una red ha de ser necesariamente un subgrupo del grupo de isometrías del cubo o del prisma hexagonal recto.

Es decir  $G_\infty$  es necesariamente un subgrupo de  $D_{234}$  o de  $D_{226}$ . (Esto es mucho más fuerte que la restricción cristalográfica). Hallaremos los 32 posibles grupos  $G_\infty$  en la próxima sección. Ellos son las llamadas **clases cristalinas geométricas**.

## LAS 32 CLASES CRISTALINAS GEOMÉTRICAS

Para hallar las clases cristalinas geométricas vamos a seleccionar aquellos grupos cristalográficos esféricos bidimensionales cuyos elementos no tienen órdenes distintos de 1,2,3,4,6 (restricción cristalográfica).

(i) Como  $Spp$  es cíclico de orden  $p$  la lista aquí se reduce a los cinco siguientes  $Spp, p=1, 2, 3, 4, 6$ .

(ii) Como  $Pp$  es cíclico de orden  $2p$  la lista aquí se reduce a tres:  $Pp, p=1, 2, 3$ .

(iii) Como  $Dp$  es producto de un cíclico de orden  $p$  y un cíclico de orden 2 la lista se reduce a cinco:  $Dp, p=1, 2, 3, 4, 6$ . De estos son cíclicos  $D1=D$  y  $D3$ .

(iv) Como  $D\overline{pp}$  es diédrico de orden  $2p$  la lista se reduce a cuatro:  $D\overline{pp}, p=2, 3, 4, 6$ .

(v) Como  $Sp22$  es diédrico de orden  $2p$  la lista baja a cuatro  $Sp22, p=2, 3, 4, 6$ .

(vi) Los cuatro casos  $Dp\overline{22}, p=2, 3, 4, 6$  son posibles.

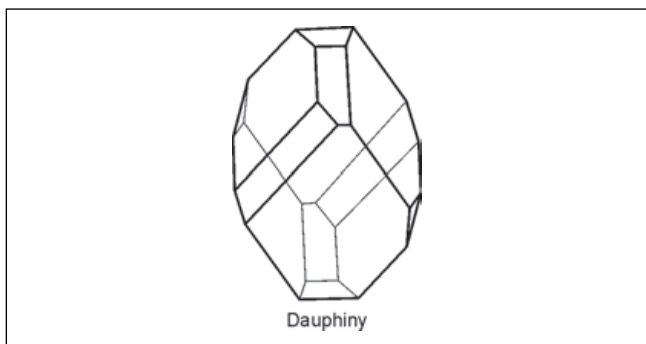
(vii) Sólo los dos casos  $D2\overline{p}, p=2, 3$  son posibles porque la acción de este grupo en el ecuador es diédrica de orden  $4p$ .

(viii) Los casos  $S332, D\overline{332}, D3\overline{2}, S432, D\overline{432}$  son posibles.

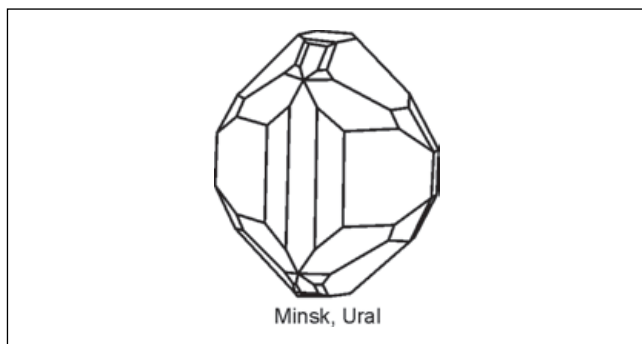
Los demás casos  $S532, D\overline{532}$  son imposibles.

Hay pues 32 grupos cristalográficos esféricos compatibles con la restricción cristalográfica: forman las 32 *clases cristalinas geométricas*. Las mejores teselaciones esféricas con esos 32 grupos las ofrecen los cristales del mundo mineral. Algunos cristales ideales

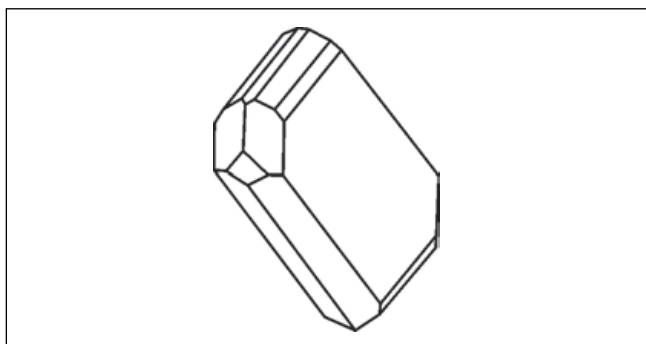




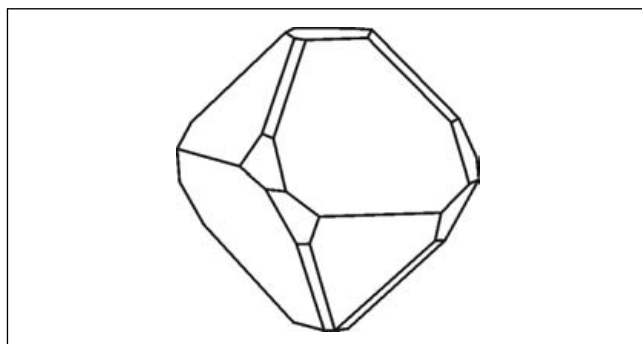
**Figura 40.**  $P$  Axinita, Clase Pinacoidal  $\bar{1}$ .



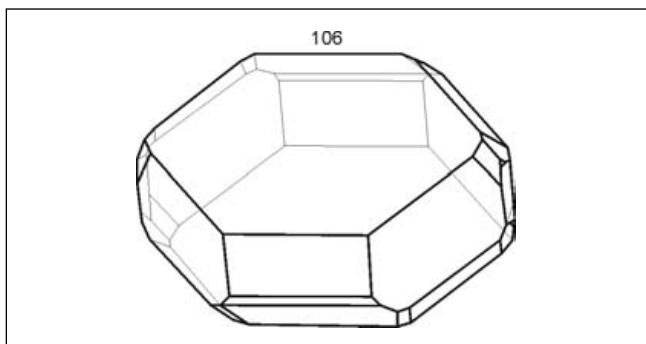
**Figura 44.**  $D\bar{2}2\bar{2}$  Brookita, Clase Bipiramidal Rómbica.



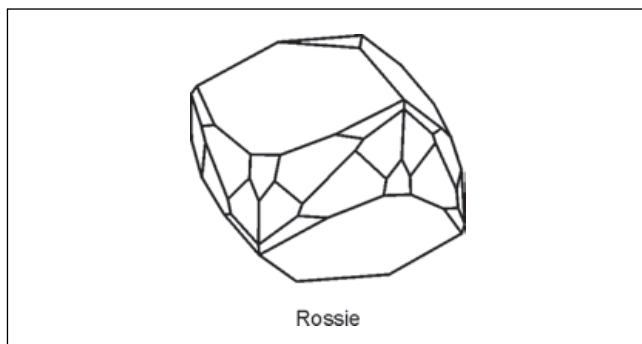
**Figura 41.**  $D_2$  Yeso.



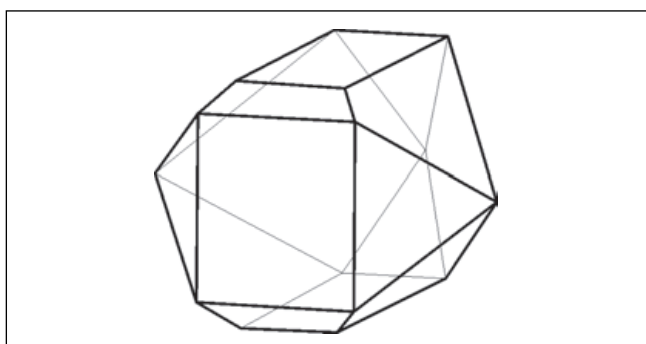
**Figura 45.**  $D\bar{2}\bar{2}$  Calcopirita, Clase escalenoédrica tetragonal.



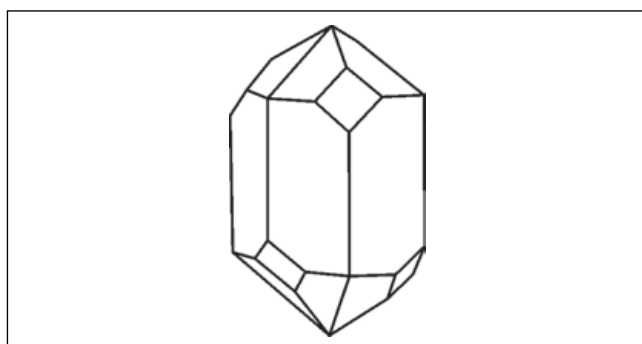
**Figura 42.**  $S\bar{2}2$  Miargirita, clase Esfenoidal.



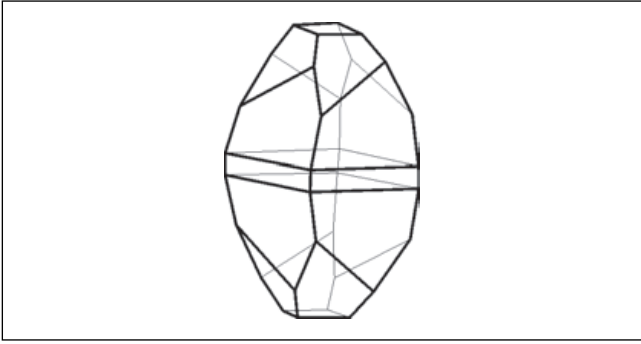
**Figura 46.**  $D\bar{2}\bar{3}$  Calcita, Clase escalenoédrica hexagonal.



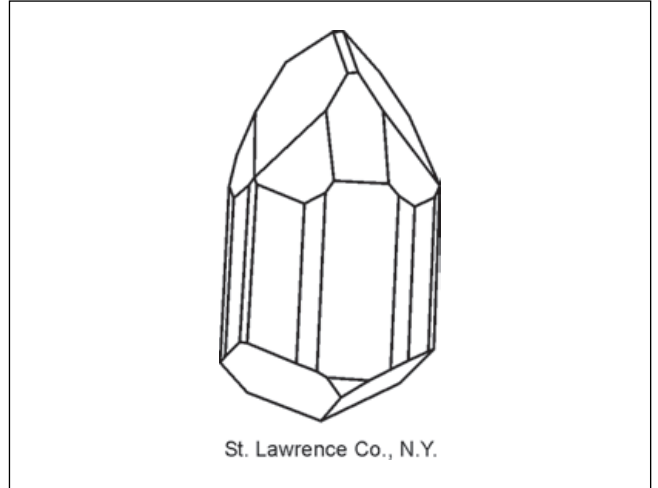
**Figura 43.**  $D\bar{2}2$  Estruvita, Clase rómbica piramidal.



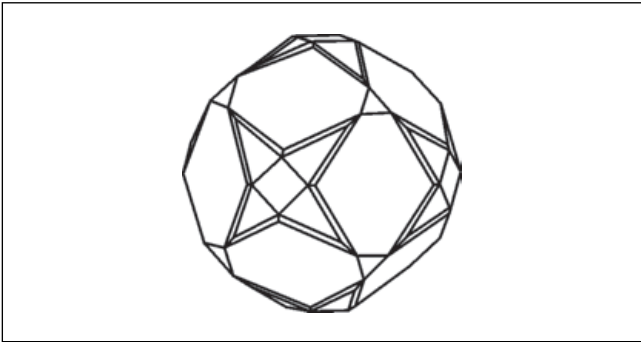
**Figura 47.**  $P_3$  Fenacita, Clase romboédrica.



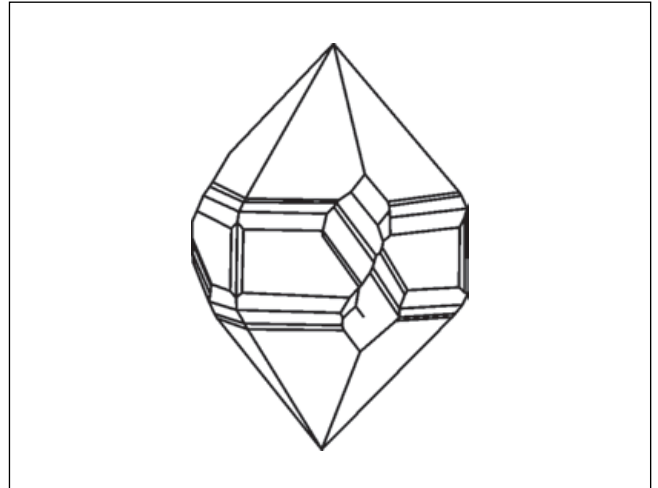
**Figura 48.**  $D_4$  Fergusonita, Clase bipiramidal tetragonal.



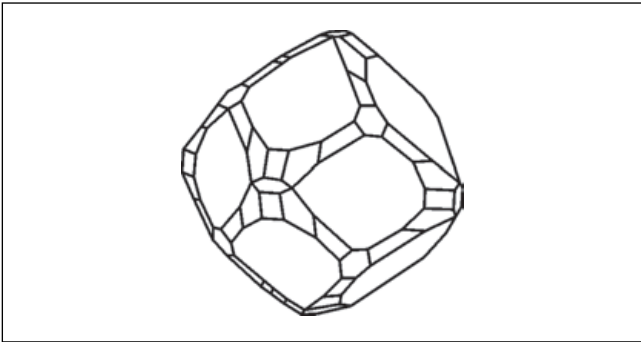
**Figura 52.**  $D_{33}$  Turmalina, Clase piramidal ditrigonal.



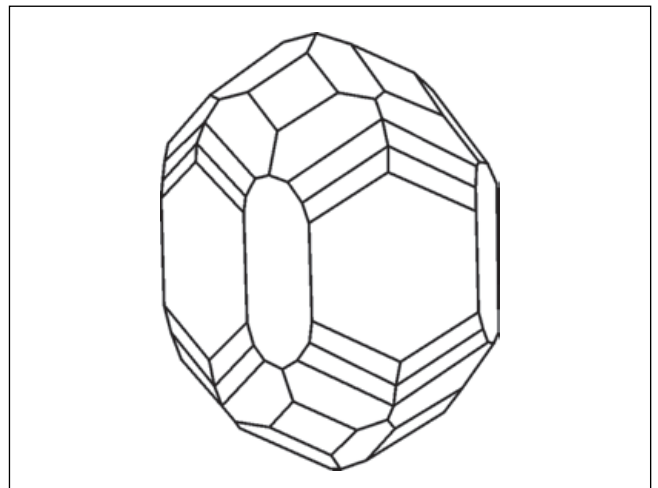
**Figura 49.**  $D_{234}$  Magnetita, Clase hexaquisoctaédrica.



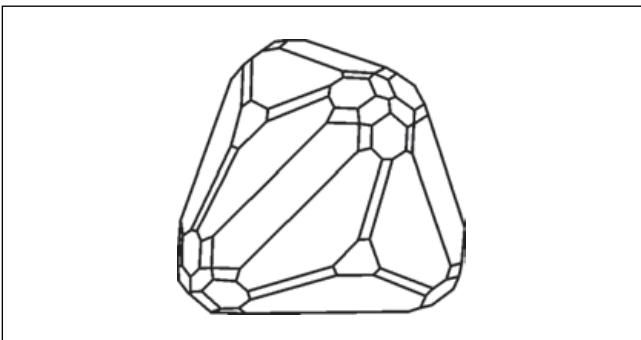
**Figura 53.**  $S_{223}$  Cuarzo, Clase trapezoédrica trigonal.



**Figura 50.**  $D_{32}$  Pirita, Clase diploédrica.



**Figura 54.**  $D_{224}$  Zircon, Clase bipiramidal ditetragonal.



**Figura 51.**  $D_{233}$  Tetraedrita, Clase hexaquistetraédrica.

que ejemplifican las 8 categorías listadas antes aparecen en las Figuras 40 a 54.

He aquí la equivalencia de notaciones<sup>3</sup>:

**Sistema triclinico:**

Clase geométrica	Crist	Top
Pedial	1	S
Pinacoidal	1̄	P

**Sistema monoclinico:**

Prismática	2/m	D2
Domática	m	D
Esfenoidal	2	S22

**Sistema ortorrómbico:**

Bipiramidal rómbica	2/m 2/m 2/m	D222
Rómbica piramidal	mm2	D22
Rómbica biesfenoidal	222	S222

**Sistema tetragonal**

Bipiramidal ditetragonal	4/m 2/m 2/m	D224
Escalenoédrica tetragonal	42m	D22
Piramidal ditetragonal	4mm	D44
Trapezoédrica tetragonal	422	S224
Bipiramidal tetragonal	4/m	D4
Biesfenoidica tetragonal	4	P2
Piramidal tetragonal	4	S44

**Sistema trigonal<sup>4</sup>**

Escalenoédrica hexagonal	3̄2m	D23
Piramidal ditrigonal	3m	D33
Trapezoédrica trigonal	32	S223
Romboédrica	3	P3
Piramidal trigonal	3	S33

**Sistema hexagonal<sup>5</sup>**

Bipiramidal dihexagonal	6/m 2/m 2/m	D226
Bipiramidal ditrigonal	6m2	D223
Piramidal dihexagonal	6mm	D66
Trapezoédrica hexagonal	622	S226
Bipiramidal hexagonal	6/m	D6
Bipiramidal trigonal	6	D3
Piramidal hexagonal	6	S66

**Sistema Isométrico**

Hexaquisoctaédrica	4/m 3̄ 2/m	D234
Hexaquistetraédrica	43m	D233
Giroédrica	432	S234
Diploédrica	2/m 3̄	D32
Tetartoédrica	23	S233

**CRISTALOGRAFÍA HIPERBÓLICA**

Las ideas anteriores se generalizan también al plano hiperbólico  $H^2$ .

El siguiente Teorema es increíblemente cierto:

**Teorema.** *Todas las orbificies de característica de Euler negativa proceden de algún grupo cristalográfico hiperbólico.*

No lo demostraré.

Obsérvese que cualquier orbificie que no sea de las listas halladas antes tiene característica negativa y por tanto hay un grupo cristalográfico asociado a ella.

Un ejemplo al azar:  $N_{563,1} 7743$  corresponde a un tal grupo. Su característica es  $-23711/42$ . El Teorema de Gauss-Bonnet dice que su área es  $23711\pi/21$ .

Una teselación de Escher del plano hiperbólico cuya orbificie asociada es  $S433$  (ignorando colores) aparece en la Figura 55.

Aquí  $\chi^o(S433) = -1 + 1/4 + 2/3 = -1/12$  y por tanto el área de  $S433$  es  $\pi/6$ .

Los cuatro colores con que Escher ha iluminado su teselación están astutamente colocados para que cualquier elemento del grupo permute coherentemente los colores. Por ejemplo, la rotación de  $90^\circ$  en el centro de la Figura 55 manda cualquier parte con color verde a otra con color canela y al revés; y cualquier parte con color azul a otra con color castaño y al revés.

<sup>3</sup> Dos clases geométricas pertenecen al mismo sistema si y sólo si el conjunto de redes (lattices) en las que ellas actúan es el mismo.

<sup>4</sup> Los grupos del sistema trigonal actúan en las redes hexagonales y en las rómbicas.

<sup>5</sup> Los grupos del sistema hexagonal actúan en las redes hexagonales pero no en las rómbicas.

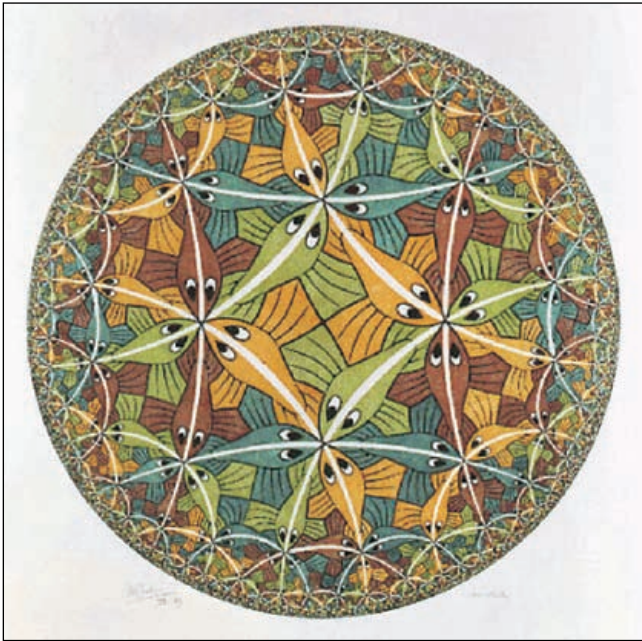


Figura 55. S433 (ignorando colores).

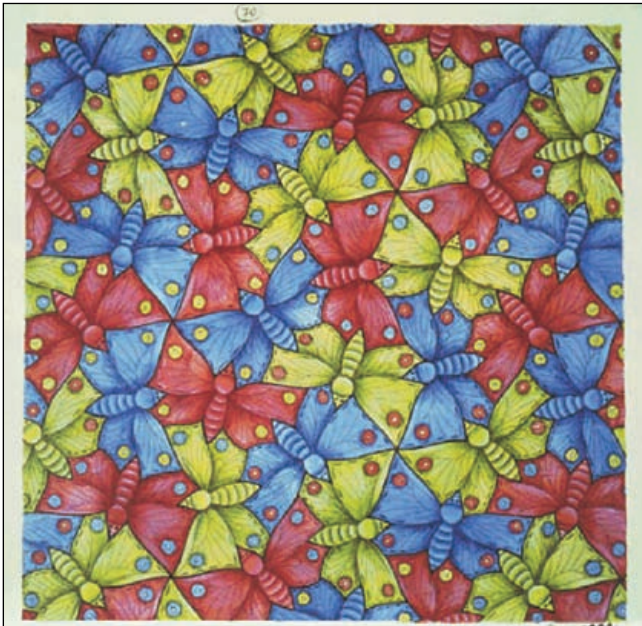


Figura 56. S632 (ignorando colores).

De este modo Escher anticipó el estudio de los grupos de color.

Otro ejemplo, esta vez euclidiano es el de la Figura 56:

El subgrupo de S632 de elementos que preservan el color rojo (por ejemplo) es también S632. El subgrupo

de éste que preserva todos los colores es S333. (Este ejemplo es equivalente al de la Figura 17).

Pero no seguiremos con esto pues nos llevaría demasiado lejos.

## CRISTALOGRAFÍA TRIDIMENSIONAL

La euclidiana posee 219 grupos. Ellos pueden obtenerse por métodos topológicos combinando lo ya hallado en dimensión dos: los 17 bidimensionales y las 32 clases geométricas. El procedimiento no puede explicarse aquí.

Los grupos esféricos (subgrupos finitos del grupo ortogonal  $O(4)$ ) pueden hallarse topológicamente: casi todos son conocidos desde el siglo XIX.

Los grupos hiperbólicos son hoy un fecundo campo de investigación: sus singularidades son nudos en muchos casos. Ello los coloca en el centro de la Topología de baja dimensión.

## NOTA FINAL

El lector interesado en Escher puede consultar la obra titulada "M. C. Escher, Art and Science" Proceedings of the International Congress on M. C. Escher, Rome, Italy, 26-28 March, 1985, edited by H. S. M. Coxeter, M. Emmer, R. Penrose, M. L. Tauber. North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford-Tokyo. Elsevier Science Publishers B. V., 1986 (ISBN:0-444-70011-0).

Otra obra maravillosa sobre los aspectos matemáticos de la obra de Escher, que merece la pena consultar es la de Doris Schattschneider, "Visions of Symmetry, Notebooks, Periodic drawings and related Work of M. C. Escher, New York 1990.

En estas obras hay abundante bibliografía.

Sobre topología, variedades, orbificies, etc. hay un libro famoso de W. Thurston, "The Geometry and Topology of 3-Manifolds" Princeton University. Notes (1976-78). Este libro ha inspirado desde entonces a geómetras y topólogos de todo el mundo. En par-



ricular, a la obra de F. Bonahon y L. Siebenmann titulada “A do-it-yourself crystal classification”, Apéndice Y a “Geometric splittings of classical knots, and the algebraic knots of Conway” (no publicado), que contiene la clasificación topológica de los grupos cristalográficos euclidianos, 2- y 3-dimensionales.

Sobre cristalografía geométrica clásica desde el punto de vista de un geómetra es difícilmente superable la obra de Marjorie Senechal, “Crystalline Symmetries: An Informal Mathematical Introduction” AdamHilger, Bristol, Philadelphia and NewYork

(1990) (ISBN 0-7503-0041-8). Su artículo titulado “What is...a Quasicrystal?” Notices of the AMS, 53, Number 8, pp.886-887 (2006) es el mejor que conozco para entender la problemática.

Un librito fantástico que puede atraer a los niños y a los menos niños es “Crystal and Crystal Growing” de Alan Holden y Phylis Singer, Anchor Books, Doubleday & Company, Inc., Garden City, New York (1960). Si no está traducido, alguien debería hacerlo, proporcionando a la vez los productos químicos necesarios para crecer cristales.